Μάθημα 10ο   08/12/17

Ολική μεταβλητότητα ≡ Δειγματική διακύμανση εντός του όρου που σχετίζεται με μέγεθος δείγματος.

$$SS_{tot} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (\overline{Y}_{ij} \overset{\pm\overline{Y}_{i.} \pm \overline{Y}_{.j}}{-} \overline{Y}_{..})^2 \Rightarrow SS_{tot} = J\sum_{i=1}^{I}(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2 + I\sum_{j=1}^{J}(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(Y_{ij}-Y_{i.}-Y_{.j}+Y_{..})^2$$

$$SS_{tot} = SS_A + SS_B + SS_{res}$$

Υπόλοιπα μοντέλο ανάλυσης διακύμανσης κατά δύο παράγοντες

$$e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij} = Y_{ij} - (\mu - \hat{a}_i - \hat{\beta}_j) = Y_{ij} - (\cancel{\overline{Y}_{..}} + \overline{Y}_{i.} - \cancel{\overline{Y}_{..}} + \overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..}) \Rightarrow$$

$$e_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..}$$

$$\boxed{\overline{Y}_{..} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\overline{Y}_{i.} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\overline{Y}_{.j}}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΔΙΑ (ΑΔΩΠ)

πηγή μεταβλητότητας	SS	β.ε	MS	F-πηλίκα
παράγοντας A	SS_A	$I-1$	$MS_A = \frac{SS_A}{(I-1)}$	$F_A = \frac{MS_A}{MS_{res}}$
παράγοντας B	SS_B	$J-1$	$MS_B = \frac{SS_B}{(J-1)}$	$F_B = \frac{MS_B}{MS_{res}}$
Υπόλοιπα	SS_{res}	$(I-1)(J-1)$	$MS_{res} = \frac{SS_{res}}{(I-1)(J-1)}$	
Ολική	SS_{tot}	$IJ-1$ πλήθος παρατηρήσεων-1		

ΘΕΩΡΗΜΑ: Υπό τις υποθέσεις για τα σφάλματα και τις πλευρικές συνθήκες:

α) $E(MS_A) = \sigma^2 + \dfrac{J}{I-1}\sum_{i=1}^{I} a_i^2$

β) $E(MS_B) = \sigma^2 + \dfrac{I}{J-1}\sum_{j=1}^{J} b_j^2$

γ) $E(MS_{res}) = \sigma^2$ (Άσκηση)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

α) $MS_A = \dfrac{SS_A}{I-1}$

$SS_A = J\sum_{i=1}^{I}(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$

$$E(SS_A) = J\sum_{i=1}^{I} E(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \overset{Var(W) = EW^2 - (EW)^2}{=} J\sum_{i=1}^{I}\left[Var(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (E(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}))^2\right] =$$

$$= J\sum_{i=1}^{I} Var(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + J\sum_{i=1}^{I}\underbrace{(E(\hat{a}_i))^2}_{=a_i} =$$

$$= J\sum_{i=1}^{I} Var(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + J\sum_{i=1}^{I} a_i^2 \quad \textbf{(1)}$$

$$\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} = \bar{Y}_{i.} - \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\bar{Y}_{i.} = \bar{Y}_{i.} - \frac{1}{I}\bar{Y}_{1.} - \cdots \overset{-\frac{1}{I}\bar{Y}_{(i-1).}}{} - \frac{1}{I}\bar{Y}_{i.} - \overset{-\frac{1}{I}\bar{Y}_{(i+1).}}{} \cdots - \frac{1}{I}\bar{Y}_{I.} =$$

$$= -\frac{1}{I}\bar{Y}_{1.} - \cdots - \left(1 - \frac{1}{I}\right)\bar{Y}_{i.} - \cdots - \frac{1}{I}\bar{Y}_{I.}$$

$$\Rightarrow \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} = -\frac{1}{I}\bar{Y}_{1.} - \underset{-\frac{1}{I}\bar{Y}_{(i-1).}}{\cdots} - \frac{I-1}{I}\bar{Y}_{i.} - \underset{-\frac{1}{I}\bar{Y}_{(i+1).}}{\cdots} - \frac{1}{I}\bar{Y}_{I.} \quad (\bar{Y}_{1.}, \ldots, \bar{Y}_{I.} \text{ ανεξάρτητα})$$

$$Var(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) = Var\left(-\frac{1}{I}\bar{Y}_{1.} - \cdots - \frac{(I-1)}{I}\bar{Y}_{i.} - \cdots - \frac{1}{I}\bar{Y}_{I.}\right) \overset{Y_{ij} \text{ ανεξάρτητα}}{\underset{\bar{Y}_{1.}, \ldots, \bar{Y}_{I.} \text{ ανεξ.}}{=}}$$

$$= \left(-\frac{1}{I}\right)^2 Var(\bar{Y}_{1.}) + \cdots + \left(\frac{I-1}{I}\right)^2 Var(\bar{Y}_{i.}) + \cdots + \left(-\frac{1}{I}\right)^2 Var(\bar{Y}_{I.})$$

$$\Rightarrow Var(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) = \frac{1}{I^2}Var(\bar{Y}_{1.}) + \cdots + \frac{(I-1)^2}{I^2}Var(\bar{Y}_{i.}) + \cdots + \frac{1}{I^2}Var(\bar{Y}_{I.}) \quad \textbf{(2)}$$

Τα $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{iJ} \sim N(\mu + a_i + b_j, \sigma^2)$ ανεξάρτητες.

$\bar{Y}_{i.} \sim N(\mu + a_i, \sigma^2 / J)$, $\forall i = 1, \dots, I$, $\bar{Y}_{i.} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} Y_{ij}$

Άρα, $Var(\bar{Y}_{i.}) = \frac{\sigma^2}{J}$, $i = 1, \dots, I$ (3)

$Var(\bar{Y}_{i.}) = Var\left(\frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} Y_{ij}\right) = \frac{1}{J^2} \sum_{j=1}^{J} Var(Y_{ij})$

μόνο αυτό διαφοροποιείται

$= \frac{1}{J^2} \sum_{j=1}^{J} \sigma^2 = \frac{J\sigma^2}{J^2} = \frac{\sigma^2}{J}$

Από (2), (3), $Var(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) = \frac{1}{I^2} \frac{\sigma^2}{J} + \dots + \frac{(I-1)^2}{I^2} \cdot \frac{\sigma^2}{J} + \dots + \frac{1}{I^2} \frac{\sigma^2}{J} =$

$$= \frac{\overbrace{(I-1)}^{\text{φορές}}}{I^2 J} \sigma^2 + \frac{(I-1)^2}{I^2 J} \sigma^2 =$$

$$= \frac{I-1}{I} \frac{\sigma^2}{J} \quad (4)$$

Από (1), (4), $E(SS_A) = J \sum_{i=1}^{I} \frac{I-1}{I} \frac{\sigma^2}{J} + J \sum_{i=1}^{I} a_i^2 = \cancel{J}\cancel{I} \cdot \frac{I-1}{\cancel{I}} \cdot \frac{\sigma^2}{\cancel{J}} + J \sum_{i=1}^{I} a_i^2 =$

$$= (I-1)\sigma^2 + J \sum_{i=1}^{I} a_i^2$$

$E(MS_A) = \frac{E(SS_A)}{I-1} = \sigma^2 + \frac{J}{I-1} \cdot \sum_{i=1}^{I} a_i^2$

Στατιστικά τεστ για έλεγχο ισοεπίδρασης των επιπέδων των παραγόντων A, B, στην Y.

$H_0^A: a_1 = a_2 = \dots = a_I \ (=0)$
$H_0^B: b_1 = b_2 = \dots = b_J \ (=0)$

Αν η H_0^A αληθής, τότε $E(MS_A) = E(MS_{res})$. Άρα, ένα τεστ θα στηριχθεί στο $\frac{MS_A}{MS_{res}} = F_A$.

Αν η H_0^B αληθής, τότε $E(MS_B) = E(MS_{res})$. Άρα, ένα τεστ για H_0^B θα στηριχθεί στο $\frac{MS_B}{MS_{res}} = F_B$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Υπό τις υποθέσεις για τα σφάλματα και τις πλευρικές συνθήκες:

α) $\frac{SS_{res}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(I-1)(J-1)}$

και την πλευρική $\sum_j b_j = 0$ $\quad SS_{res} = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j} + \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$

β) Υπό την H_0^A: $a_1 = a_2 = \dots = a_I = 0$ το $\frac{SS_A}{\sigma^2} \sim \chi^2_{I-1}$

γ) Υπό την H_0^B: $b_1 = b_2 = \dots = b_J = 0$ το $\frac{SS_B}{\sigma^2} \sim \chi^2_{J-1}$

και την πλευρική $\sum_i a_i = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

α) $Y_{ij} \sim N(\mu + a_i + b_j, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$ ανεξ.

$$\Downarrow$$

$$\frac{Y_{ij} - \mu - a_i - b_j}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(Y_{ij} - \mu - a_i - b_j)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1 \xRightarrow{Y_{ij} \text{ ανεξ.}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^I (Y_{ij} - \mu - a_i - b_j)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_I \xRightarrow{\text{βάζω εκτιμητές}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^I (Y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{a}_i - \hat{b}_j)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{I-1}$$

$$\boxed{\bar{Y}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{J}\bar{Y}_{i\cdot} = \frac{1}{I}\bar{Y}_{\cdot j} = \frac{1}{JI}\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{ij}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^I (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot} + \bar{Y}_{\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j} + \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{I-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^I (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j} + \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{I-1} \quad (1)$$

Ανάλογα

$$\frac{\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j} + \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{J-1} \quad (2)$$

Από (1), (2): $\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j} + \bar{Y}_{\cdot\cdot})}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(I-1)(J-1)}$

β) $SS_A = J \sum_{i=1}^I (\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$

$\overline{Y}_{i.} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}$, $Y_{ij} \sim N(\mu + a_i + b_j, \sigma^2)$

$\overline{Y}_{i.} \sim$ Normal

$$E(\overline{Y}_{i.}) = E\left(\frac{1}{J}\cdot\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}\right) = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} E(Y_{ij}) = \frac{1}{J}\cdot\sum_{i=1}^{I}(\mu + a_i + b_j) = \mu + a_i + \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} b_j$$

Υπο την H_0^A και την πλευρική συνθήκη $\sum_{j=1}^{J} b_j = 0$

$E(\overline{Y}_{i.}) = \mu$

$$Var(\overline{Y}_{i.}) = Var\left(\frac{1}{J}\cdot\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}\right) \xrightarrow[\text{ανεξ.}]{Y_{ij}} \frac{1}{J^2}\sum_{j=1}^{J} Var(Y_{ij}) = \frac{1}{J^2}\sum_{j=1}^{J}\sigma^2 = \frac{1}{J^2} J\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{J}$$

Άρα $\overline{Y}_{i.} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{J}\right)$, $i = 1, \dots, I$ υπό την H_0^A και πλ. συνθήκη $\sum_{j=1}^{J} b_j = 0$

$$\Rightarrow \frac{\overline{Y}_i - \mu}{\sigma/\sqrt{J}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\sqrt{J}\,(\overline{Y}_{i.} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{J(\overline{Y}_{i.} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{J\sum_{i=1}^{I}(\overline{Y}_{i.} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_I^2 \Rightarrow \frac{J\sum_{i=1}^{I}(\overline{Y}_{i.} - \hat{\mu})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{I-1}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{J\sum_{i=1}^{I}(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{I-1}^2 \Rightarrow \frac{SS_A}{\sigma^2} \sim \chi_{I-1}^2$$

Ελεγχοι ισοεπίδρασης επιπέδων των A και B

Για τον έλεγχο της H_0^A: $a_1 = a_2 = \dots = a_I (= 0)$ η ΣΣΤ είναι:

$F_A = \frac{MS_A}{MS_{res}} \sim F_{I-1,\,(I-1)(J-1)}$ υπό την H_0^A. και Κ.Π. μεγέθους a την:

$F_A \geq F_{I-1,\,(I-1)(J-1),\,a}$

Για τον έλεγχο της H_0^B: $b_1 = b_2 = \dots = b_J (= 0)$ η ΣΣΤ είναι:

$F_B = \frac{MS_B}{MS_{res}} \sim F_{J-1,\,(I-1)(J-1)}$ υπό την H_0^B και Κ.Π μεγέθους a την:

$F_B \geq F_{J-1,\,(I-1)(J-1),\,a}$

Αν τουλάχιστον μια από τις H_0^A, H_0^B απορριφθεί ⇝ πολλαπλές συγκρίσεις.
Στην πράξη περιμένουμε οι H_0^A, H_0^B να απορρίπτονται.
↓
Αν απορρίπτονται → ∃ επίπεδα των A και B που ασκούν σημαντικότερη επίδραση στην Y
↓
ποιά επίπεδα των A και B ασκούν σημαντικότερη επίδραση στην Y_j
↓
πολλαπλές συγκρίσεις.

Μέθοδος της ΕΣΔ (Ελάχιστη σημαντική διαφορά)

<u>ΕΣΔ για τον παράγοντα A</u> → έλεγχος $H_0^{A*}: a_i = a_{i'}$ έναντι $H_a^{A*}: a_i \neq a_{i'}$

Η H_0^{A*} απορρίπτεται αν $|\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{i'\cdot}| > t_{(I-1)(J-1),\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{2MS_{res}}{J}} \equiv ΕΣΔ(A)$

ΣΣΤ: $(\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{i'\cdot}) \Big/ \sqrt{\frac{2MS_{res}}{J}} \sim t_{(I-1)(J-1)}$ υπό H_0^{A*}

Αν η $H_0^{A*}: a_i = a_{i'}$ απορριφθεί τότε:
- αν $\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{i'\cdot} > 0$ το i-επίπεδο ασκεί σημαντικότερη επίδραση από το i'.
- αν $\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{i'\cdot} < 0$ το i'-επίπεδο ασκεί σημαντικότερη επίδραση από το i.

και αυτό για κάθε $i = 1, \dots, I$.

<u>ΕΣΔ για τον παράγοντα B</u> → έλεγχος $H_0^{B*}: b_j = b_{j'}$ έναντι $H_a^{B*}: b_j \neq b_{j'}$

Η H_0^{B*} απορρίπτεται αν $|\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot j'}| > t_{(I-1)(J-1),\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{2MS_{res}}{I}} \equiv ΕΣΔ(B)$

Αν η $H_0^{B*}: b_j = b_{j'}$ απορριφθεί τότε:
- αν $\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot j'} > 0$ το j-επίπεδο ασκεί σημαντικότερη επίδραση από το j'.
- αν $\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot j'} < 0$ το j'-επίπεδο ασκεί σημαντικότερη επίδραση από το j.

και αυτό για κάθε $j = 1, \dots, J$

<u>Μέθοδος</u> Γραμμικών αντιθέσεων

<u>ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ A</u>

- Έστω $L_A = \sum_{i=1}^{I} c_i a_i$, $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$ μια γραμμική αντίθεση στα επίπεδα του παράγοντα A.

Για τον έλεγχο της $H_0^{LA}: L_A=0$ χρησιμοποιείται η ΣΣΤ: $F_{LA}=\frac{MS_{LA}}{MS_{res}}$, $MS_{LA}=\frac{\hat{L}_A^2}{\left(\frac{1}{J}\sum_i a_i^2\right)}$

$\hat{L}_A=\sum_{i=1}^{I} c_i\bar{Y}_{i.}$ με κατανομή $F_{LA}\sim F_{1,(I-1)(J-1)}$ υπό την H_0^{LA} και

κ.π. μεγέθους a : $F_{LA}\geq F_{1,(I-1)(J-1),a}$ κατασκευή τεστ, το ίδιο με την κατά ένα παράγοντα.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ Β

- Έστω $L_B=\sum_{j=1}^{J} c_j\beta_j$, $\sum_{j=1}^{J} c_j=0$ μια γραμμική αντίθεση στα επίπεδα του παράγοντα Β.

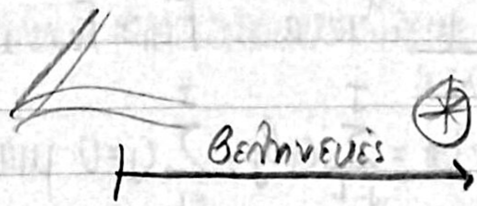
Για τον έλεγχο της $H_0^{LB}: L_B=0$ χρησιμοποιείται η ΣΣΤ $F_{LB}=\frac{MS_{LB}}{MS_{res}}$, $MS_{LB}=\frac{\hat{L}_B^2}{\left(\frac{1}{I}\sum_j c_j^2\right)}$

$\hat{L}_B=\sum_{j=1}^{J} c_j\bar{Y}_{.j}$ με κατανομή $F_{LB}\sim F_{1,(I-1)(J-1)}$ υπό την H_0^{LB} και

κ.π. μεγέθους a: $F_{LB}\geq F_{1,(I-1)(J-1),a}$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

		Καύσιμο			
		1	2	3	4
ΤΡΟΠΟΣ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗΣ	1	45.9	57.6	52.2	41.7
	2	46	51	50.1	38.8
	3	45.7	56.9	55.3	48.1



Σε ένα πείραμα θέλουμε να εξετάσουμε την επίδραση 4 διαφορετικών καυσίμων και 3 διαφορετικών τρόπων εκτόξευσης πάνω στο βεληνεκές κάποιου τύπου ρουκέτας. Τα δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας είναι τα παραπάνω, όπου το βεληνεκές μετριέται σε χιλιόμετρα. Να αναλυθούν τα δεδομένα αυτά.

ΛΥΣΗ:

Y = βεληνεκές $\xrightarrow{\text{παράγοντας A}}$ Τρόπος εκτόξευσης

Y = βεληνεκές $\xrightarrow{\text{παράγοντας B}}$ Καύσιμο

Μοντέλο: $Y_{ij} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ij}$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4.$

μ: κοινή επίδραση στον Y των 2 παραγόντων

a_i: Επιδράσεις Τρόπων Εκτόξευσης

b_j: Επιδράσεις καυσίμων

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΔΙΑ

πηγή μεταβλητότητας	SS	β.ε	MS	F-πηλίκο
A: Τρόπος εκτόξευσης	$SS_A = 50.852$	$I-1=2$	$MS_A = 25.426$	$F_A = 4.428$
B: Καύσιμο	$SS_B = 293.702$	$J-1=3$	$MS_B = 97.9$	$F_B = 17.048$
Υπόλοιπα	$SS_{res} = 34.455$	$(I-1)(J-1)=6$	$MS_{res} = 5.743$	
Ολική	$SS_{tot} = 379.009$	$IJ-1=11$		

<u>Έλεγχος</u>: H_0^A: $a_1=a_2=a_3=0$

Επειδή $F_A=4.428 < \begin{matrix} F_{2,6,0.05}=5.14 \\ F_{2,6,0.01}=10.9 \end{matrix}$

η H_0^A δεν μπορεί να απορριφθεί.
Άρα, οι τρόποι ευτόξευσης δεν φαίνεται να επηρεάζουν το βελήνεκές.

<u>Έλεγχος</u>: H_0^B: $b_1=b_2=b_3=b_4=0$

Επειδή $F_B=17.048 \gg \begin{matrix} F_{3,6,0.05}=4.76 \\ F_{3,6,0.01}=9.78 \end{matrix}$

⇒ Άρα, απορρίπτω H_0^B
Επομένως, ∃κάποιο(-α) καύσιμο(-α) που ασκούν σημαντικότερη επίδραση στο βελήνεκές

Πολλαπλές συγκρίσεις

$\bar{Y}_{\cdot1}-\bar{Y}_{\cdot2}=-9.3$, $\bar{Y}_{\cdot1}-\bar{Y}_{\cdot3}=-6.66$, $\bar{Y}_{\cdot1}-\bar{Y}_{\cdot4}=3$
$\bar{Y}_{\cdot2}-\bar{Y}_{\cdot3}=2.634$, $\bar{Y}_{\cdot2}-\bar{Y}_{\cdot4}=12,3$, $\bar{Y}_{\cdot3}-\bar{Y}_{\cdot4}=9.666$.

$$ΕΣΔ= t_{(I-1)(J-1),\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{2MS_{res}}{I}} \xrightarrow{a=5\%} t_{6,0.025}\sqrt{\frac{2*5.743}{3}}=4.793.$$

$|\bar{Y}_{\cdot1}-\bar{Y}_{\cdot2}|>ΕΣΔ$ Απορ. $b_1=b_2$, Επειδή $\bar{Y}_{\cdot1}-\bar{Y}_{\cdot2}<0 \Rightarrow 1<2$ → πιο σημαντικό από το 1.

$|\bar{Y}_{\cdot1}-\bar{Y}_{\cdot3}|>ΕΣΔ$. Απορ. $b_1=b_3$, Επειδή $\bar{Y}_{\cdot1}-\bar{Y}_{\cdot3}<0 \Rightarrow 1<3$

$|\bar{Y}_{\cdot1}-\bar{Y}_{\cdot4}|<ΕΣΔ$ Αποδέχομαι $b_1=b_4 \Rightarrow 1=4$

$|\bar{Y}_{\cdot2}-\bar{Y}_{\cdot3}|<ΕΣΔ$ Αποδέχομαι $b_2=b_3 \Rightarrow 2=3$

$|\bar{Y}_{\cdot2}-\bar{Y}_{\cdot4}|>ΕΣΔ$. Απορ. $b_2=b_4$, Επειδή $\bar{Y}_{\cdot2}-\bar{Y}_{\cdot4}>0 \Rightarrow 2>4$ → χειρότερο από το 2 καλύτερο από το 4.

$|\bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{.4}| > ΕΣΔ$ Απορ. $\beta_3 = \beta_4$, Επειδή $\bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{.4} > 0 \Rightarrow 3 > 4$

Συγκεντρωτικά: $1 \equiv 4 < 2 \equiv 3$ ⇒ τρόπος εντόξευσης: όποιο θέλω

καύσιμο: